На правах рукописи

Аль - Кхазраджи Сундус Хатем Маджид

О компьютерном моделировании некоторых задач фильтрации в пористой среде

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2015

Работа выполнена в Воронежском государственном университете

Научный руководитель: доктор физико–математических наук, профессор Костин Владимир Алексеевич.

Официальные оппоненты: Калитвин Анатолий Семенович, доктор физико-математических наук, профессор Липецкий государственный педагогический университет, кафедра математики, заведующий.

Ряжских Виктор Иванович, доктор технических наук, профессор, Воронежский государственный технический университет, кафедра приткладной математики и механики, заведующий.

Ведущая организация: Южно-Уральский государственный университет.

Защита состоится 16 февраля 2016 г. в 15 часов 10 минут на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 333.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте http://www.science.vsu.ru/dissertations/2467/Диссертация_Аль-Кхазраджи_С.Х..pdf

Автореферат разослан « » декабря 2015.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.038.22
доктор физико-математических наук, профессор

Глушко А.В.

Актуальность темы. Учитывая широкое использование пористых сред в приложениях, таких как фильтрация, абсорбция, транспирационное охлаждение и т.д. и фактически непреодолимые проблемы при идентификации их локальных гидродинамических характеристик на основе классических уравнений Новье-Стокса, необходима разработка новых методов анализа так называемых приближенных моделей с распределенными параметрами типа модели В.С. Голубева, учитывающие структуры пористых сред. В частности, сюда относятся некоторые теории, описывающие движения жидкости в пористой среде. В.С.Голубев показывает, что существует структура потока, зависящая от расхода жидкостей, которая при малом расходе имея ламинарный поток охватывает всю элементарную камеру (см. рис. 1а), а с увеличением расхода структура потока приобретает двойственный характер. В то время как в ядре потока (проточной зоне) жидкость движется от входа к выходу по прямолинейным траекториям, на периферии потока (в застойной зоне) она вовлекается в вихревое движение (рис. 1б). Такой не ламинарный (но и не турбулентный) режим характерен для течения жидкости в пористой среде.

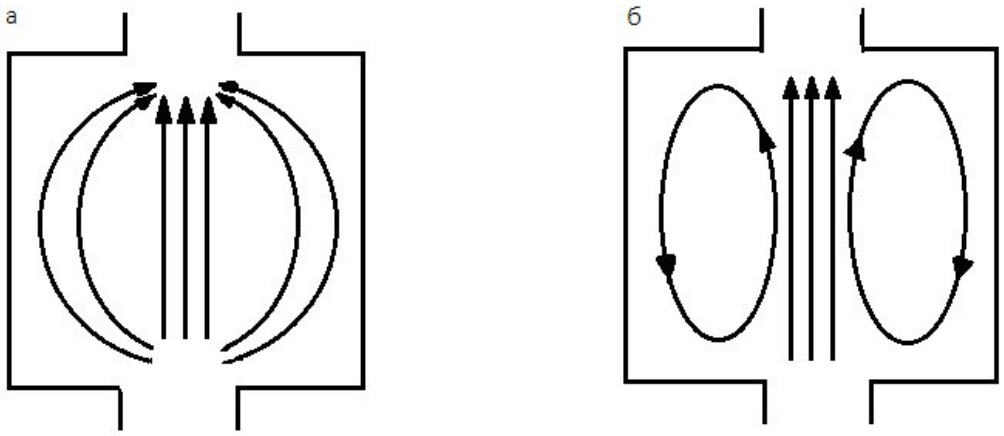

Рис. 1. Схематическое изображение траекторий частиц жидкости в областях ламинарного (а) и вихревого (б) массообмена между проточными и застойными зонами камеры.

Уравнение движения жидкости в таком случае имеет вид

$$a\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} = \nu\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} + (1-\nu)p(t,x) -$$

$$-(1-\nu)\gamma^2\int_0^t e^{\gamma(s-t)}p(s,x)ds = \mathrm{L}_t p(t,x), \qquad (1)$$

где $x \geq 0$, $t \geq 0$, ν-доля объема проточных зон, γ-константа массообмена между проточными и застойными зонами, a- коэффициент пьезопроводимо-

сти. Различные задачи для такого уравнения изучались многими авторами, в частности Ю.И.Бабенко.

Однако проблемы корректности и адекватности таких моделей проработаны недостаточно, что сдерживает фактически обоснованность применения различных процедур численного интегрирования. Такие исследования тем более важны при численной реализации задач с применением высокоскоростных компьютерных технологий. Как правило, проводимые при этом исследования касаются только вопросов существования решений соответствующих задач и их интегро-дифференциальных представлений. Вопросы же корректной разрешимости и следующей из этого устойчивости решений по исходным данным, в этих работах не обсуждаются.

Например, у Ю.И. Бабенко, для уравнения (1) рассматривается задача

$$p(0,x) = 0, \tag{2}$$

$$p(t,0) = \varphi(t), \qquad \lim_{x\to 0}(t,x) = 0. \tag{3}$$

Требуется найти градиент давления у границы области.

$$\left.\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = q(t). \tag{4}$$

Ответ дается в виде

$$q(t) = \mathrm{L}_{\mathrm{t}}^{\frac{1}{2}} q(t) = \sqrt{\frac{a}{\nu}} e^{-\gamma t} M e^{\gamma t}, \tag{5}$$

где неограниченный оператор M формально выписывается в виде ряда сходимость которого не обсуждается.

Предлагаемый в настоящей работе метод и алгоритм численной реализации решения как задачи (1)–(3), так и вычисления функции $q(t)$ в (4) позволяет устранить указанные недостатки. Здесь мы используем довольно общий метод С.Г. Крейна решения граничных задач для уравнений в банаховом пространстве.

В настоящей диссертации проведен анализ математической модели (1) для задачи Ю.И. Бабенко (1)–(3), а также для граничных задач на конечном интервале $[0,l]$, с начальным условием (2) и граничными условиями:

$$p(t,0) = \varphi(t), \qquad (t,l) = \psi(t), \tag{7}$$

$$\frac{\partial p(t,0)}{\partial x} = \varphi_1(t), \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \psi_1(t)}{\partial x}. \tag{8}$$

Эти исследования приводят к необходимости введения дробных степеней оператора (в частности $A^{\frac{1}{2}}$), в терминах которого формулируются определения решений этих задач.

Этим и обусловливается актуальность темы. Диссертационное исследование выполнено в рамках г/б НИР ВГУ (№ ГР 01201266154) "Качественная теория некоторых классов дифференциальных уравнений и операторов в специальных функциональных пространствах". НИР в рамках госзадания Минобрнауки РФ 2012-2013гг.

Цели и задачи исследования. Разработка методов анализа математических моделей движения сжимаемых сред в пористых системах на основе установления корректности различных постановок нестационарных краевых задач. Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей. Разработка новых математических методов и алгоритмов, интерпретации натурного эксперимента на основе математической модели.

С этой целью необходимо изучить феноменологическое уравнение движения жидкости на основе моделей пористой среды, состоящей из проточных и застойных зон, предложенное В.С. Голубевым; установить корректную разрешимость граничных задач для дифференциальных уравнений, описывающих эту модель, с целью обоснования нового численного метода реализации этих задач; применить полученные результаты к построению автоматического регулирования течения вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде, с целью использования компьютерных технологий для реализации соответствующих алгоритмов управления.

Реализация цели исследования осуществляется решением следующих задач, как теоретического, так и прикладного характера:

1. Модификация модели В.С. Голубева движения жидкости в пористой среде с застойными зонами.

2. Разработка инструментария для анализа сформулированных краевых задач на основе установления корректности.

3. Разработка предметно-ориентированной программы для реализации предлагаемого алгоритма.

4. Проведение вычислительного эксперимента и анализ результатов с практическими рекомендациями о продолжительности функционирования предлагаемой системы.

Объект исследования. Исследуется одна из основных задач теории тепломассопереноса - определение материальных и энергетических потоков на

границе раздела сред. О важности этого понятия говорит то, что для гетерогенных процессов (межфазовые химические реакции, растворение, кристаллизация, испарение, конденсация и т.д.) производительность аппаратов в ряде случаев можно рассчитывать, зная интенсивность массообмена на межфазной границе. Эффективность теплообменных устройств также определяется тепловыми потоками на поверхности раздела.

Методы исследования. Разработанные в диссертационной работе методы исследования математических моделей задач фильтрации в пористой среде основаны на фундаментальных методах функционального анализа, теории корректных и некорректных задач с приложением к корректной разрешимости задач для математических моделей, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями дробного порядка.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносится аналитические и численные методы исследования граничных задач для интегро-дифференциальных уравнений В.С. Голубева, описывающего процесс фильтрации в пористой среде.

Научная новизна. 1. В диссертационной работе предлагаются новые подходы анализа математических моделей, основополагающим математическим объектом которых являются нестационарные задачи для эволюционных уравнений, описывающих движение жидкости в пористой среде.

2. Доказана корректная разрешимость решений рассматриваемых граничных задач для таких уравнений.

3. Указан регуляризирующий алгоритм численной реализации градиента давления, в проточной зоне, на границе области.

4. Построена модель автоматического регулирования течения вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде.

5. Построен алгоритм, который реализован в среде программирования Delphi и даны соответствующие рекомендации.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическое значение работы заключается в применении методов функционального анализа, в частности, в теории линейных полугрупп преобразований к исследованию конкретных математических моделей, представляющих собой нестационарные задачи, описывающие явление тепломассопереноса. Получать их точное решение и устанавливать корректную разрешимость, что обеспечивает устойчивую стабилизацию, сходимости приближенных решений к точному. Практическая значимость результатов и методов диссертационной работы заключается в возможности их использования в качестве инструментов для ис-

следования математических моделей, описывающих процессы фильтрации в пористых средах, например, в трубопроводах с шероховатыми (фрактальными) стенками и проводить анализ изменения давления сжимаемой жидкости с помощью размещения датчиков давления жидкости вдоль магистралей и судить о структуре измеряемых данных.

Область исследования.Область исследования и содержание диссертации находятся на стыке специальностей 01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление и 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико–математические науки). По специальности 01.01.02 область исследований включает применение методов дробного интегро-дифференциального исчисления к исследованию корректной разрешимости нестационарных задач для дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа. По специальности 05.13.18 область исследования соответствует п. 2 "Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей п. 4 "Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно–ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента п. 6. "Разработка новых математических методов и алгоритмов проверки адекватности математических моделей объектов на основе данных натурного эксперимента".

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались на Воронежской зимней математической школе в 2014 г., на Воронежской математической школе "Понтрягинские чтения"в 2013, 2014 гг., на Международной молодежной научной школе "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"в 2012 г., а также на семинарах ВГУ по математическому моделированию (рук.— проф. В.А. Костин) и нелинейному анализу (рук.— проф. Ю.И. Сапронов, проф. Б.М. Даринский).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]—[6]. В совместных публикациях [1],[3],[4],[6] в диссертацию вошли результаты, принадлежащие лично автору. Работы [3] и [4] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых журналов и изданий, рекомендованных ВАК РФ.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 15 параграфов, 1 приложения в котором описываются алгоритмы и программный код написанный для среды программирования Delphi, литературы из 58 наименований. Общий объем диссертации—95 стр. Работа содержит 8 рисунков.

Основное содержание работы. Во введении обосновывается актуальность темы, научная новизна, формулируются цели и задачи исследования. Указываются методы общей теории полугрупп, линейных преобразований, применяемых к исследованию корректной разрешимости граничных задач, описывающих процессы фильтрации в пористой среде. При исследовании процессов фильтрации в пористой среде рассматривается задача отыскания давления $p(t,x)$, удовлетворяющее уравнению (1) и граничным условиям

I. Для $x \in [0,\infty)$ и $t \in [0,\infty)$

$$p(0,x) = 0, \tag{9}$$

$$p(t,0) = q(t), \lim_{x\to\infty} p(t,x) = 0. \tag{10}$$

II. Для $x \in [0,l]$ и $t \in [0,\infty)$ задача Дирихле

$$p(0,x) = 0, \tag{11}$$

$$p(t,0) = \varphi_1(t), \qquad p(t,l) = \psi_1(t), \tag{12}$$

III. Задача Неймана. $x \in [0,l]$ и $t \in [0,\infty)$

$$p'_x(t,0) = \varphi_2(t), \qquad p'_x(t,l) = \psi_2(t). \tag{13}$$

Здесь ν-доля объема проточных зон, γ-константа массообмена между проточными и застойными зонами, a- коэффициент пьезопроводимости.

Требуется найти градиент давления у границы области.

$$\left.\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi(t). \tag{14}$$

Первая глава диссертации содержит необходимую терминологию, понятия и общие фундаментальные факты, связанные с теорией корректно разрешимых задач для уравнений в банаховом пространстве.

Вводятся понятия сильно непрерывных полугрупп, их генераторов и их связи с корректной разрешимостью начально-краевых задач для уравнений (1).

Вводятся понятия решений этих уравнений и равномерно корректной разрешимости, задач (1),(9)–(10) и граничных задач Дирихле и Неймана.

Далее, в диссертации вводятся дробные степени для операторов A— таких, что $-A$ является генератором сильно непрерывной полугруппы класса C_0, что гарантирует корректную разрешимость, рассматриваемой задачи.

Также, в терминах дробных степеней операторов, формулируются критерии корректной корректной разрешимости краевой задачи (1), (9)–(10), которые формулируются в терминах квадратного корня $(-A)^{\frac{1}{2}}$. В §1.6 приводится новый метод решения нестационарной задачи для одномерного параболического уравнения, особенность которой заключается в том, что пространственная переменная изменяется на всей положительной полуоси.

Во второй главе поставленные задачи формулируются в терминах общей теории сильно непрерывных полугрупп.

В банаховом пространстве E рассматривается уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} = Au(x), \qquad x \in [0, \pi], \tag{2.1.1}$$

где A- вообще говоря, неограниченный в E оператор с областью определения $D(A)$ такой, что оператор $-A$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $U(t, -A)$,удовлетворяющей оценке

$$\|U(t, -A)\| \leq Me^{-\omega t}, \qquad \omega \geq 0 \tag{2.1.2}$$

Определение 2.1.1. Решением уравнения (2.1.1) будем называть функцию $u(x)$ со значениями в $D(A)$, дважды непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую (2.1.1) на отрезке $[0, l]$.

Определение 2.1.2. Задача Дирихле для уравнения (2.1.1)

$$u(0) = \varphi_1, u(l) = \psi_1, \tag{2.1.3}$$

называется корректной, если она однозначно разрешима для любых $\varphi_1, \psi_1 \in D(A)$ и существует $c_1 > 0$ такое, что для всех решений (2.1.1) справедливо неравенство

$$\sup_{x\in[0,l]} \|u(x)\|_E \leq c_1(\|\varphi_1\|_E + \|\psi_1\|_E). \tag{2.1.4}$$

Определение 2.1.3. Задача Неймана для уравнения (2.1.1)

$$u'(0) = \varphi_2, u'(l) = \psi_2, \tag{2.1.5}$$

называется корректной, если она однозначно разрешима для всех $\varphi_2, \psi_2 \in D(A)$ и существует $c_2 > 0$ такое, что для всех решений (2.1.1) справедливо неравенство случае

$$\sup_{x\in[0,l]} \|u(x)\|_E \leq c_2(\|\varphi_2\|_E + \|\psi_2\|_E). \tag{2.1.6}$$

В случае $l = \infty$ отыскиваются решения $u(x)$ в предположении ограниченности

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \|u(x)\| < \infty \tag{2.1.7}$$

и удовлетворяющие условиям

$$u(0) = \varphi_3 \tag{2.1.8}$$

задача Дирихле;

$$u'(0) = \varphi_4 \tag{2.1.9}$$

задача Неймана.

И оценкам (2.1.4) и (2.1.6) соответствуют оценки

$$\sup_{x\in[0,l]} \|u(x)\|_E \le c_1\|\varphi_3\|, \tag{2.1.10}$$

$$\sup_{x\in[0,l]} \|u(x)\|_E \le c_2\|\varphi_4\|. \tag{2.1.11}$$

Отметим, что условие (2.1.2) обеспечивает корректную разрешимость рассматриваемых задач и справедливость следующих результатов. Для простоты изложения будем считать $l = \pi$. Из результатов А.В.Князюка [20] следует корректная разрешимость задачи Дирихле (2.1.1)-(2.1.3) и для ее решения получено представление

$$u(x) = F(x)\varphi_1 + F(\pi - x)\psi_1, \tag{2.1.12}$$

где

$$F(x)\varphi = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \cdot n(n^2 + A)^{-1}\varphi. \tag{2.1.13}$$

Если $\varphi_1 \in D(A)$, то

$$F(x)\varphi = (1 - \frac{x}{\pi})\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}(n^2 + A)^{-1}A\varphi. \tag{2.1.14}$$

Задача Неймана корректна, при этом решение имеет вид

$$u(x) = S(x)\varphi_2 + S(\pi - x)\psi_2, \tag{2.1.15}$$

где

$$S(x)\varphi = \frac{1}{\pi}[A^{-1}\varphi + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx(n^2 + A)^{-1}\varphi]. \tag{2.1.16}$$

Заметим, что из (2.1.13) и (2.1.16) следует соотношение

$$S'(x)\varphi = F(x)\varphi, \tag{2.1.17}$$

Если $\varphi \in D(A)$, то

$$F'(x)\varphi = -S(x)A\varphi. \tag{2.1.18}$$

Задачи (2.1.1)-(2.1.8) корректно разрешима, при этом ее решение имеет вид

$$u(x)\varphi_3 = U(x, -(-A)^{\frac{1}{2}})\varphi_3. \tag{2.1.22}$$

Наконец, задача Неймана в случае полуоси (2.1.9) также корректно разрешима, и решение имеет вид

$$u(x)\varphi_4 = -\int_x^\infty U(\tau, -(-A)^{\frac{1}{2}})\varphi_4 d\tau. \tag{2.1.23}$$

Если $l = \infty$, то граничные условия принимают вид

$$p(0) = \varphi_3, \qquad \lim_{x\to\infty} \|p(x)\| = 0, \tag{2.2.5}$$

и

$$p'(0) = \varphi_4, \qquad \lim_{x\to\infty} \|p(x)\| = 0. \tag{2.2.6}$$

Таким образом, для установления корректной разрешимости исследуемых задач необходимо построить полугруппу $U(x, -A)$ и получить для нее оценку (2.1.2).

С этой целью оператор A в (2.1.1) представим в виде суммы $A = A_1 + A_2$, где оператор A_1 задается дифференциальным выражением

$$l_1 u(t) = \frac{\nu}{a}\frac{du(t)}{dt} + \frac{1-\nu}{a}u(t) \tag{2.3.1}$$

и областью определения $D(A_1) = \{u \in C_{[0,\infty)}, l_1 u \in C_{[0,\infty)}, u(0) = 0\}$. Оператор A_2 зададим интегральным оператором

$$A_2 u(t) = -\frac{1-\nu}{a}\gamma^2 \int_0^t e^{\gamma(s-t)}u(s)ds. \tag{2.3.2}$$

Справедливы следующие утверждения:

а) оператор A_2 ограничен в $C_{[0,\infty)}$ и имеет место оценка

$$\|A_2 u\| \le \frac{1-\nu}{a}\gamma\|u\|; \tag{2.3.3}$$

б) операторы A_1 и A_2 коммутируют на $D(A_1)$. Полугруппа $U(x,-A_1)$ с генератором A_1 имеет вид

$$U(x,-A_1)u(t) = e^{-\frac{1-\nu}{a}x}\begin{cases} u(t-\frac{\nu}{a}x), & \frac{\nu}{a}x \le t; \\ 0, & \frac{\nu}{a}x > t \end{cases} \tag{2.3.5}$$

Отсюда следует оценка

$$\|U(x,-A_1)\| \le e^{-\frac{1-\nu}{a}x}; \tag{2.3.6}$$

в) полугруппа $U(x,-A_2)$ имеет вид

$$U(x,-A_2)u(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(-A_2)^n u(t), \tag{2.3.7}$$

где

$$(-A_2)^n u(t) = \begin{cases} \frac{(1-\nu)^n\gamma^{2n}}{a^n(n-1)!}\int_0^t e^{-\gamma s}s^{n-1}u(t-s)ds, & n=1,2,...; \\ I, & n=0. \end{cases} \tag{2.3.8}$$

I-тождественный оператор.

Это дает оценку

$$\|A_2^n u\| \le \frac{(1-\nu)^n\gamma^{2n}}{a^n(n-1)!}\int_0^{\infty} e^{-\gamma s}s^{n-1}ds\|u\| = (\frac{1-\nu}{a})^n\gamma^n\|u\|. \tag{2.3.9}$$

из которой следует неравенство

$$\|U(x,-A_2)u\| \le \|u\|\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1-\nu}{a})^n\frac{\gamma^n x^n}{n!} = e^{\frac{(1-\nu)\gamma}{a}x}\|u\|. \tag{2.3.10}$$

Теперь нетрудно видеть, что из (2.3.6) и (2.3.10) следует оценка

$$\|U(x,-A)\| \le \|U(x,-A_1)\|\|U(x,-A_2)\| \le exp[-\frac{(1-\nu)(1-\gamma)}{a}]. \tag{2.3.11}$$

Далее, пользуясь (2.3.8) в (2.3.7), получаем представление

$$U(x,-A_2)u(t) = u(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\nu)^n\gamma^{2n}x^n}{a^n(n-1)!n!}\int_0^t e^{-\gamma s}s^{n-1}u(t-s)ds =$$

$$= u(t) + x\frac{1-\nu}{a}\gamma^2\int_0^t e^{-\gamma s}I_1(2\gamma\sqrt{\frac{1-\nu}{a}xs})u(t-s)ds. \tag{2.3.12}$$

Здесь мы воспользовались соответствующим представлением функции Бесселя $I_1(z)$ первого рода.

Теперь, пользуясь (2.3.5) и (2.3.12), получаем вид полугруппы $U(t,-A)$

$$U(x,-A)u(t) = U(x,-A_1)U(x,-A_2)u(t) =$$

$$= e^{-\frac{1-\nu}{a}x}\begin{cases} u(t-\frac{\nu}{a}x)+(1-\frac{\nu}{a})\gamma^2 x+ & s \le t-\frac{\nu}{a}x; \\ +\int_0^{t-\frac{\nu}{a}x} I_1(2\gamma\sqrt{\frac{1-\nu}{a}xs})e^{-\gamma s}u(t-\frac{\nu}{a}x-s)ds, & \\ 0, & t-\frac{\nu}{a}x < s. \end{cases} \tag{2.3.13}$$

В §2.4 производится построение оператора $\sqrt{A}$, и доказывается следующее утверждение:

для оператора $\sqrt{A}$ справедливо представление

$$A^{\frac{1}{2}}q(t) = \frac{1}{\pi}A\int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}}U(s,-A)q(t)ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}}U(s,-A)Aq(t)ds, \tag{2.4.14}$$

где $U(s,-A)$ имеет вид (2.3.13.)

что и представляет собой искомый градиент давления на границы области $x=0$.

Из приведенных утверждений следует

Теорема 2.4.1. Задача

$$a\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} = \nu\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} + (1-\nu)p(t,x) -$$

$$-(1-\nu)\gamma^2\int_0^t e^{\gamma(s-t)}p(s,x)ds = \mathrm{L}_t p(t,x)$$

$$p(t,0) = q(t), \lim_{x\to\infty} p(t,x) = 0$$

имеет единственное решение, которое представимо в виде

$$p(t,x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty s^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4s}}U(s,-A)q(t)ds. \tag{2.4.16}$$

Отметим, что из этого представления следует неравенство корректности

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |p(t,x)| \le e^{[-\frac{(1-\nu)(1-\gamma)}{a}]^{\frac{1}{2}}x}\|q\|. \tag{2.4.18}$$

С помощью этой теоремы доказывается критерий устойчивости и сходимости соответствующих разностных схем (1.6.3) — (1.6.5) и (1.6.4) — (1.6.5) и справедливость теорем:

Теорема 1.6.1. Пусть $0 < \tau \leq \frac{h^2}{2}$. Тогда разностная схема (1.6.3)—(1.6.5) устойчива.

Теорема 1.6.2. При любых h и τ разностная схема (1.6.4)—(1.6.5) устойчива.

В этих теоремах устойчивость понимается в соответствии с нормами

$$\max_{0\leq n\leq N} \|u^n\| \leq c_1(\max_{0\leq n\leq N} \|f^n\| + \max_{0\leq k\leq N} |q^k|).$$

Таким образом, нахождение градиента давления на границе области выражается через неограниченный оператор L_t, и вследствие этого их численная реализация осуществляется с помощью соответствующих регуляризирующих методов. Но из разложения $L_t = \nu\frac{\partial}{\partial t} + L_0$, где L_0— неограниченный оператор, следует, что регуляризирующий алгоритм относится только к вычислению производной $\frac{\partial}{\partial t}$, что также реализуется по стандартной схеме.

Следовательно, из представлений (2.5.5)-(2.5.7) следует, что при решении задачи Дирихле, в частности задачи Ю.И.Бабенко, сначала нужно получить решение равномерно корректной задачи Неймана, а затем применить стандартный алгоритм вычисления производной.

В третьей главе предыдущие результаты по вычислению градиента давления применяются к построению модели автоматического регулирования течения вязкой сжимающей жидкости в пористой среде, с целью выработки рекомендаций о местах размещения датчиков давления жидкости вдоль магистрали и о структуре измеряемых данных.

Предполагается, что автоматическое управление изменениями давления вязкой сжимаемой жидкости, протекающей в пористой жидкость-проводящей магистрали, реализуется цифровой системой, структурная схема которой приводится на рисунке 2.

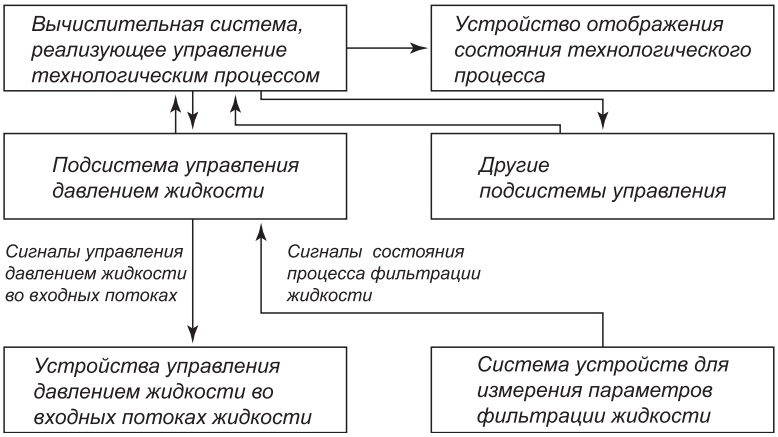

Рис. 2. Блок - схема системы управления течением жидкости в магистрали.

Алгоритм для проведения расчётов состоит из следующих шагов:

1. Задание коэффициентов модели.

2. Задание точки по оси x, в которой ведётся наблюдение за поведением решения.

3. Вычисление значений решения на очередном слое и в точке наблюдения.

4. Оценка пользователем достаточности полученных данных при заданных данных.

5. Нужны дополнительные данные?

Да, переход к п.3 Нет, переход к п.6

6. Нужны эксперименты с новыми значениями параметров модели?

Да, переход к п.1 Нет, выход.

С использованием приведённой выше программы были проделаны численные эксперименты, результаты которых приведены на рис. 3.

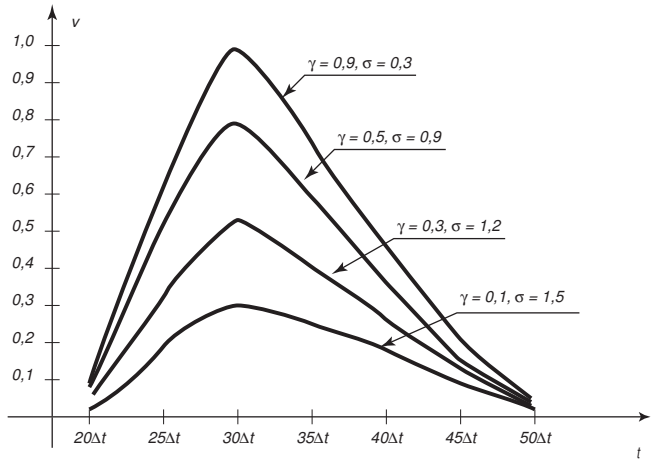

Рис. 3. Изменение начального импульса давления в точке $x_0 = 20dx$ от времени в зависимости от значений пар параметров γ, σ.

На основе полученных результатов, можно сделать вывод о том, что изменение давления в точке $x_0 = 20dx$ может дать достаточный объём информации для управления процессом кристаллизации в жидкость проводящей магистрали.

Публикации автора по теме диссертации.

[1] Аль-Кхазраджи Сундус Х.М. Об одной задаче движения сжимающей жидкости в пористой среде / Аль Казараджи Сундус Хатем Маджид, В.А. Костин // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения XXIV".— Воронеж, 2013 .— С. 13-14

[2] Аль-Кхазраджи Сундус Х.М. О способе построения фрактальной поверхности / Х.М. Аль-Кхазраджи Сундус // Современные методы теории

функций и смежные проблемы: материалы Воронежской зимней математической школы, 2013. - С. 9

[3] Аль-Кхазраджи Сундус Х.М. Об одной задаче фильтрации в пористой среде / М.Н. Небольсина, С.Х.М. Аль Кхазраджи // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика .— Воронеж, 2014 .— № 3. - С. 129-135

[4] Аль-Кхазраджи Сундус Х.М. О корректной разрешимости некоторых задач фильтрации в пористой среде / М.Н. Небольсина, С.Х.М. Аль Кхазраджи // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математическое моделирование и программирование .— Челябинск, 2014 .— Т. 7, № 3.

[5] Аль-Кхазраджи Сундус Х.М. О разностных методах решения одной задачи фильтрации / Х.М. Аль-Кхазраджи Сундус // Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна - 2014. Материалы международной конференции, Воронеж, 2014. - С.25-26

[6] Аль-Кхазраджи Сундус Х.М. Об автоматическом регулировании течения вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде / Х.М. Аль-Кхазраджи Сундус, В.А. Костин, В.Г. Фирсов//«Актуальные направления научных исследований XXI века : теория и практика» : сб. науч. тр. по мат. межд. заочной науч.-практич. конф. «Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения» (проведена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-31-10229)), г. Воронеж, 18-19 ноября 2014 г., ФГБОУ ВПО «Воронежская государственная лесотехническая академия» (ВГЛТА). – Воронеж : УОП ФГБОУ ВПО «ВГЛТА», 2014. - № 5. – Ч. 2 (10-2). - С. 8-19.

Работы [3] и [4] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых журналов и изданий, рекомендованных ВАК РФ.